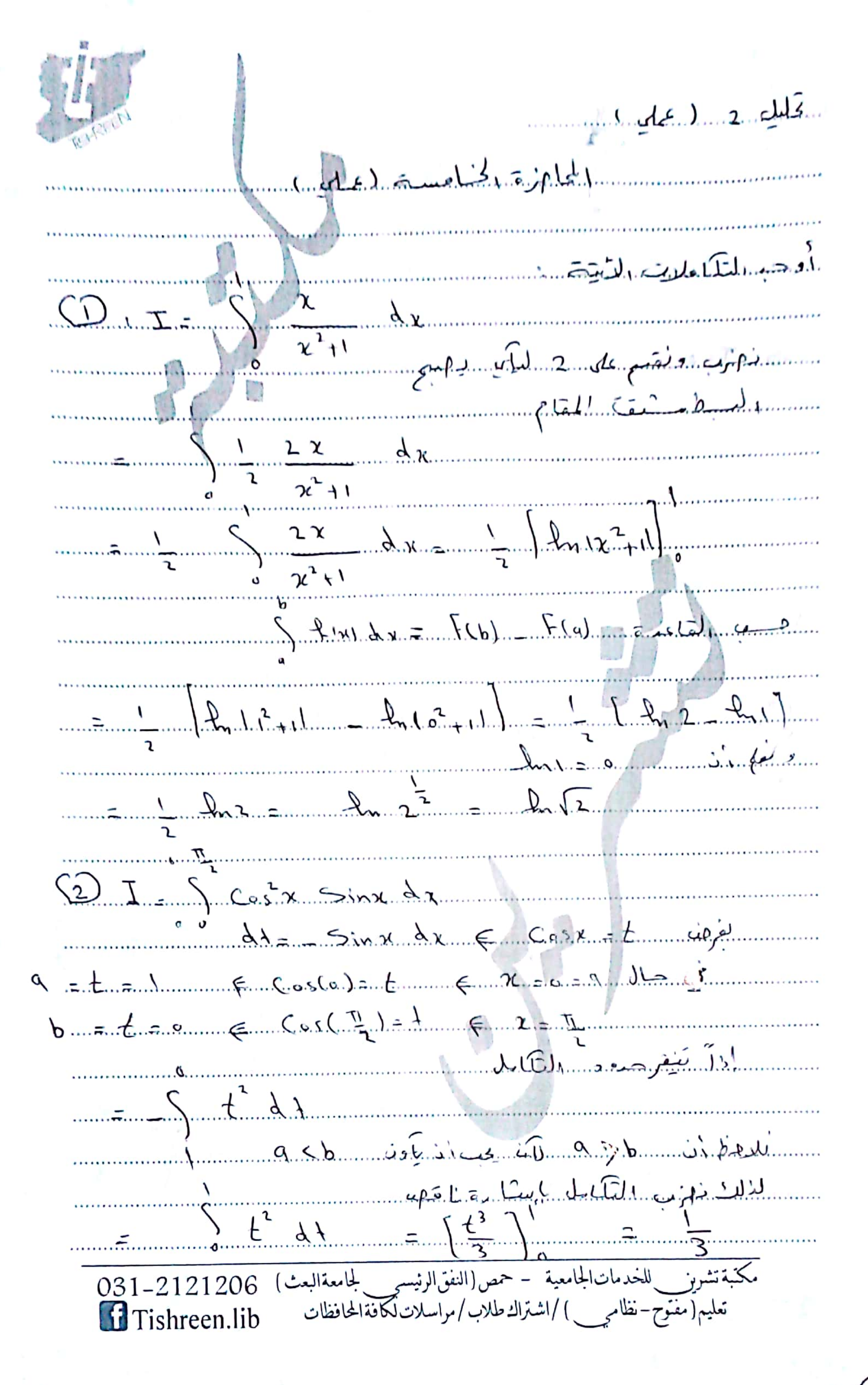


تحليل 2 (عملي)

المحاضرة الخامسة (عملي)

أوجد التكاملات الآتية:

(1) $I = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx$

نضرب ونقسم على 2 لكي يصبح البسط مشتق المقام

$= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \left[\ln|x^2+1|\right]_0^1$

حسب القاعدة: $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

$= \frac{1}{2} \left[\ln|1^2+1| - \ln|0^2+1|\right] = \frac{1}{2} \left[\ln 2 - \ln 1\right]$

ونعلم أن: $\ln 1 = 0$

$= \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2}$

(2) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\, dx$

نفرض $\cos x = t \Leftarrow dt = -\sin x\, dx$

في حال $x = 0 = a \Leftarrow \cos(0) = t \Leftarrow a = t = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \cos(\frac{\pi}{2}) = t \Leftarrow b = t = 0$

إذاً تتغير حدود التكامل

$= -\int_1^0 t^2\, dt$

نلاحظ أن b أكبر من a لأنه يجب أن يكون $a < b$

لذلك نضرب التكامل بإشارة ناقص

$= \int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

③: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{1+\sin^2 x}$

نفرض $\sin x = t \Leftarrow dt = \cos x \, dx$

نبدل $x = 0 \Leftarrow \sin 0 = t \Leftarrow t = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \sin \frac{\pi}{2} = t \Leftarrow t = 1$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

$= [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0$

$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

④: $I = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{5+4\cos x}$

نفرض $t = \tan \frac{x}{2} \Leftarrow dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5+4\frac{(1-t^2)}{1+t^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2\,dt}{t^2+9}$

$= \left[\frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \arctan \sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{9}$

⑤: احسب مساحة الشكل المحصور بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$

والمستقيمات $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

$\Rightarrow S = \int_1^4 \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^4$

$\Rightarrow S = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 - 0 = \ln 4$

وحدة مربعة

(6) احسب المساحة المحددة بالمنحنيات $y = \ln x$
والمستقيمات $y = 0$ ، $x = e$

$$S = \int_1^e y\, dx = \int_1^e \ln x \, dx$$

نستخدم التكامل بالتجزئة

$$u = \ln x \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = x \;\Rightarrow\; dv = dx$$

$$\Rightarrow S = \left[x \ln x - x\right]_1^e = (e \ln e - e) - (0 - 1)$$

$$= e - e + 1 = 1$$

وحدة مربعة

(7) : احسب مساحة السطح المحصور

$y = \sin x$ $\quad 0 \le x \le 2\pi$

$$S = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi} - \left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4$$

وحدة مربعة

انتهت المحاضرة الخامسة

« مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح »

إعداد : فاطمة الشيشي